2Є

УДК 519.85

Ємець О.О., Ємець Є.М., Ольховський Д.М., Парфьонова Т.О.
Полтавський університет економіки та торгівлі, м. Полтава, Україна
contacts@informatics.org.ua

Другий метод комбінаторного відсікання та розв'язування комбінаторних транспортних задач на переставленнях

У статті розглядається комбінаторна транспортна задача на переставленнях. Для класу задач, до якого вона відноситься, запропоновано та обґрунтовано другий метод комбінаторного відсікання. В запропонованому методі, на відміну від відомого методу комбінаторного відсікання, пропонується об'єднати перевірку умови належності отриманого розв'язування переставному многограннику з перевіркою додаткових лінійних умов задачі. Відсікання пропонується робити тільки на переставному многограннику.

Вступ

Розвиток математичного моделювання, зокрема на базі комбінаторної оптимізації [1-8], виокремлення задач евклідової комбінаторної оптимізації, дослідження властивостей задач евклідової комбінаторної оптимізації та евклідових комбінаторних множин обумовили розробку ряду нових методів для комбінаторних оптимізаційних задач [3-8]. Зокрема, для задач оптимізації на переставленнях був запропонований та обґрунтований метод комбінаторного відсікання [5], [9-14]. Задачі комбінаторної оптимізації актуальні і при розробці систем штучного інтелекту. Це обумовлюється тим, що вони є моделями задач вибору, які необхідно розв'язувати в системах штучного інтелекту.

Актуальною є необхідність подальшого дослідження підходу, що ґрунтується на ідеях методів відсікання для задач оптимізації лінійних функцій з лінійними додатковими обмеженнями, в яких допустима точка має переставні властивості.

У цій роботі пропонується і обґрунтовується другий метод комбінаторного відсікання в застосуванні до комбінаторної транспортної задачі на переставленнях [15], [16].

Постановка задачі

В роботах [15], [16] вводиться до розгляду та досліджується комбінаторна транспортна задача на множині переставлень $E_{k\nu}(G)$, що має математичну модель: знайти

$$C\left(x^*\right) = \min_{x \in R^k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ;$$

$$x^* = \left(x_{11}^*, ..., x_{mn}^*\right) = \arg\min_{x \in R^k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in J_m ;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad \forall j \in J_n ;$$

$$x = \left(x_{11}, ..., x_{mn}\right) \in E_{k\nu}\left(G\right),$$

де $k = m \cdot n$, a_i, b_j, c_{ij} – задані сталі, G – задана мультимножини обсягів можливих перевезень $G = \left\{g_1, ..., g_k\right\}$, $E_{k\nu}\left(G\right)$ – множина переставлень з повтореннями з елементів мультимножини $G = \left\{g_1, ..., g_k\right\}$, основа $S\left(G\right)$ якої має ν елементів: $\left|S\left(G\right)\right| = \nu$. Сенс параметрів a_i – обсяг виробництва в пункті виробництва i $\forall i \in J_m$; b_j – обсяг споживання в пункті споживання j $\forall j \in J_n$; c_{ij} – тариф на перевезення з пункту виробництва i в пункт споживання j $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$.

Ця модель є частковим випадком наступної задачі.

Розглянемо максимізацію лінійної функції за додаткових лінійних обмежень на множині переставлень, тобто задачу: знайти пару $\left\langle C\left(y^*\right), y\right\rangle$, яка визначається як

$$C\left(y^*\right) = \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j , \tag{1}$$

$$y^* = \left(y_1^*, ..., y_n^*\right) = \arg\max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{2}$$

за додаткових лінійних умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i, \ \forall i \in J_r ; \tag{3}$$

$$y_j \ge 0, \ \forall j \in J_n \tag{4}$$

та за комбінаторних обмежень

$$x = \left(x_1, ..., x_k\right) = \left(y_1, ..., y_k\right) \in E_{k\nu}\left(G\right) \subset R^k , \tag{5}$$

де n, r, k, ν – визначені натуральні константи $\left(k \le n\right)$, R^n – n-вимірний арифметичний евклідовий простір, $J_r = \left\{1, 2, ..., r\right\}$ – множина перших r натуральних чисел, c_j, a_{ij}, b_i – задані дійсні числа $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_n$, а $E_{k\nu}\left(G\right)$ – множина переставлень з повтореннями з елементів мультимножини $G = \left\{g_1, ..., g_k\right\}$, основа $S\left(G\right)$ якої має ν елементів: $\left|S\left(G\right)\right| = \nu$.

Другий метод комбінаторного відсікання для розв'язування задачі (1) – (5)

У роботах [5], [9-14] запропоновано і обґрунтовано метод комбінаторного відсікання (назвемо його – перший метод) для задачі (1) – (5). Суттєвою є перевірка умови

$$x \in \Pi_{k\nu}\left(G\right). \tag{6}$$

У розглянутій схемі методу відсікання многогранник M визначається як многогранниками $\Pi_{k\nu}\left(G\right)$ та (3), (4), так і нерівностями-відсіканнями, які приєднуються до (3) в ході розв'язування задачі (1) – (5).

У даній роботі пропонується відсікання робити тільки на переставному многограннику, а перевірку умови

$$x^* \in E_{k\nu}\left(G\right) \tag{7}$$

об'єднати з перевіркою умови (3).

Викладемо цей (другий) метод комбінаторного відсікання.

Крок 0. Задаємо цілочислову змінну q рівною нулю: $q = 0$.

Крок 1. Розв'язуємо ДЗЛП (1), (2), (4), (6). (Зауважимо, що за умови $g_i \ge 0$, умова (4) автоматично виконується). Розв'язання ДЗЛП позначимо $y^* = \left(y_1^*,...,y_n^*\right)$, де $\left(y_1^*,...,y_k^*\right) = x^*$.

Зауваження 1. Задача (1), (2), (4), (6) є ЗЛП, оскільки переставний многогранник $\Pi_{k\nu}\left(G\right)$, як відомо [3], [4], описується такою системою лінійних обмежень:

$$\sum_{i\in\omega} x_i \ge \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \ \forall \omega \subset J_k, \ |\omega| < k; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{j=1}^{k} g_j, \tag{9}$$

де вважається, що елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням:

$$g_1 \le g_2 \le ... \le g_k. \tag{10}$$

Зауваження 2. Задачу (1), (2), (4), (6), або, що теж саме ЗЛП (1), (2), (4), (8), (9), можна розв'язувати безпосередньо методом, що дає вершину допустимої області (симплекс-методом чи методом штучного базису), а можна у випадку $n = k$ (повністю комбінаторної задачі) скористатися наступними відомими фактами. По-перше, загально відомо [17], що розв'язання ЗЛП досягається у вершині допустимого многогранника. По-друге, переставний многогранник має [3], [4] властивість збіжності множини його вершин $vert\,\Pi_{k\nu}\left(G\right)$ з множиною переставлень $E_{k\nu}\left(G\right)$:

$$E_{k\nu}\left(G\right) = vert\Pi_{k\nu}\left(G\right). \tag{11}$$

По-третє, відоме [3], [4] розв'язання лінійної безумовної задачі оптимізації на множині переставлень (в [4] на с. 79 теорема 3.1 та зауваження 3.3 на с. 82). Це розв'язання знаходиться так: нехай

$$c_{\beta_1} \ge c_{\beta_2} \ge ... \ge c_{\beta_k}, \tag{12}$$

де $\beta = \left(\beta_1,...,\beta_k\right)$ – переставлення з елементів J_k (або коротко $\beta \in E_{kk}\left(J_k\right) = E_k\left(J_k\right)$), виконується умова (10). Тоді x^* з (2) визначається умовами:

$$x_{\beta_i}^* = g_{k-i+1}, \ \forall i \in J_k. \tag{13}$$

Зауваження 3. По виконанню кроку 1 умова (7) завжди виконується, оскільки допустимий многогранник *M*, що є опуклою оболонкою множини E $\left(M = conv\,E\right)$, має властивість: $vert\,M = vert\,conv\,E = E$.

Для множини E ця властивість означає вершинну розташованість стосовно многогранника M [13], [14]. Обґрунтовування цього факту дано далі.

Крок 2. Перевіряємо умову, що точка $y^* = \left(y_1^*,...,y_n^*\right)$ задовольняє співвідношенням (3), (4).

Якщо умови:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = b_i, \ \forall i \in J_r; \tag{14}$$

$$y_j^* \geq 0\,,\ \forall j \in J_n\,, \tag{15}$$

виконалися, то вихідна задача (1) – (5) розв'язана. Алгоритм закінчує роботу. В іншому разі – перехід на крок 3.

Крок 3. Збільшуємо q на одиницю.

Крок 4. Будуємо нерівність-відсікання точки y^*:

$$\sum_{i_j \in J} \frac{y_{i_j}}{\theta_{i_j}} \geq 1\,, \tag{16}$$

де J – множина небазисних змінних в точці y^*,

$$\theta_j = \min_{i:\alpha_{ij}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{tj}}\,,\ j \in J\,. \tag{17}$$

В (17) α_{ij}, β_j – елементи останньої симплекс-таблиці ДЗЛП (i – номер її рядка, j – номер стовпця небазисної змінної).

Перетворюємо нерівність (16) у рівність:

$$-\sum_{i_j \in J} \frac{y_{i_j}}{\theta_{i_j}} + y_{n+q} = -1\,, \tag{18}$$

де $y_{n+q} \geq 0$ – додаткова змінна, та додаємо до системи (6) (що теж саме до системи (8), (9)). У формулах (16), (18) $J = \{j_1,...,j_\gamma\}$ – множина номерів небазисних змінних в останній точці y^* (одержаної як розв'язання поточної ДЗЛП); γ – кількість небазисних змінних. Переходимо на крок 1.

Правильність відсікання (тобто те, що y^* відсікається, а жодна допустима точка задачі (1) – (5) – ні) обґрунтовує теорема 1.

Теорема 1. Нехай нерівність-відсікання задається формулою (16), в якій величини θ_j визначаються умовою (17). Нехай точка $y^* = \left(y_1^*,...,y_{n+q}^*\right)$ – розв'язання ДЗЛП, яке відсікається. Тоді нерівності (16) точка y^* не задовольняє, а всі вершини, що суміжні з y^* в допустимому многограннику ДЗЛП, справджують нерівність (16) як рівність. Всі переставлення з $E_{k\nu}(G)$, що задовольняють умови (3), (4), задовольняють і (16).

Доведення. У формулі (16) при підстановці в неї точки y^* всі змінні в лівій частині дорівнюють нулю як небазисні в точці y^* змінні. Отже з (16) в y^* маємо $0 \geq 1$, що свідчить про те, що координати точки y^* нерівність (16) не задовольняють. За побудовою [17], [18] суміжної з точкою y^* вершини $\tilde{y}$ допустимого многогранника ДЗЛП в точці $\tilde{y}$ будемо мати такі координати з тих, що входять у формулу (16): деяка координата y_{i_j} (для кожної з γ точок $\tilde{y}$ власна), $i_j \in J$, $\forall j \in J_\gamma$, $\gamma = |J|$, дорівнює числу θ_{i_j}, що обчислюється за (17), а усі інші координати точки $\tilde{y}$ з (16) – нульові. Тобто в довільній суміжній з y^* вершині $\tilde{y}$ допустимого многогранника ДЗЛП нерівність (16) приймає вигляд: $\theta_{i_j} / \theta_{i_j} + 0 + ... + 0 \geq 1$, або $1 \equiv 1$. Оскільки множина переставлень $E_{k\nu}(G)$ елементів з G є вершинно розташованою, то жодного переставлення, що не лежить у вершині допустимого многогранника ДЗЛП, немає. Теорема доведена.

Теорема 2. (Критерій переходу на гіпергрань переставного многогранника в методі комбінаторного відсікання). Нерівність-відсікання в першому або другому методі комбінаторного відсікання в задачах на множині переставлень $E_k(G)$, яка (нерівність) має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le b, \tag{19}$$

визначає гіпергрань $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = b$ многогранника $\Pi_k(G) = conv\, E_k(G)$, якщо і тільки якщо:

$$a_j \in \{0,1\},\ \forall j \in J_k; \tag{20}$$

$$b = \sum_{j=1}^{t} g_j \tag{21}$$

або

$$b = \sum_{j=1}^{t} g_{k-j+1}, \tag{22}$$

де

$$t = \sum_{j=1}^{k} a_j. \tag{23}$$

Доведення. Як відомо [3], [4], гіпергрань многогранника $\Pi_k(G)$ визначається нерівностями (8), або з урахуванням рівності (9) за умови (10) нерівностями, еквівалентними (8):

$$\sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1},\ \forall \omega \subset J_k,\ |\omega| < k \tag{24}$$

і тільки цими нерівностями.

У системі, що описує $\Pi_k(G)$, при виконанні умов теореми є нерівність, що відрізняється від (19) знаком. Якщо нерівність (19) (а це, нагадаємо, правильне відсікання) мала той же знак, що і нерівність з (8) або (24), яка має такі ж ліву і праву частину, що і (19), то така нерівність нічого б не відсікала від $\Pi_k(G)$, тобто не була правильним відсіканням. Це і означає необхідність і достатність умов (19) – (23).

Отже гіпергрань в $\Pi_k(G)$ визначається за умов (20) – (23) рівністю

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = b. \tag{25}$$

Теорема 3. (Критерій переходу на гіпергрань загального переставного многогранника в методі комбінаторного відсікання). Нерівність-відсікання (19) в першому або другому методі комбінаторного відсікання в задачах на загальній множині переставлень $E_{k\nu}(G)$, де мультимножина G має основу $S(G) = (e_1,...,e_\nu)$ та первинну специфікацію $[\eta_1,...,\eta_\nu]$, визначає гіпергрань (25) многогранника $\Pi_{k\nu}(G) = conv\, E_{k\nu}(G)$, якщо і тільки якщо виконуються умови (20) – (23), а також:

1) якщо $\eta_1 > 1$, то t, що обчислюється за (23), таке: $t \in J_k \setminus \{2,3,...,\eta_1\}$;
2) якщо $\eta_\nu > 1$, то t за (23) таке: $t \in J_k \setminus \{k-\eta_\nu, k-\eta_\nu+1,...,k-2\}$.

Доведення. Як відомо [4], [19], якщо $\eta_1 > 1$, то надлишковими нерівностями в системі (8), що описує $\Pi_{k\nu}(G)$, є нерівності спілок [4], [19] з номерами з множини $\{2,3,...,\eta_1\}$. У випадку $\eta_\nu > 1$ надлишковими в (8) за [4], [19] є нерівності спілок з номерами $\{k-\eta_\nu, k-\eta_\nu+1,...,k-2\}$. Як показано в [19], інших надлишкових нерівностей система (8) не має. Далі доведення повторює доведення теореми 3 з заміною многогранника $\Pi_k(G)$ на $\Pi_{k\nu}(G)$, та посиланням на [19], де визначені всі гіперграні загального переставного многогранника.

Твердження 4. Перехід на грань у другому методі комбінаторного відсікання на множині переставлень $E_k(G)$ відбувається не раніше, ніж через k_B відсікань, де

$$k_B = k! - (k-1)! \qquad (26)$$

Доведення. Щоб перейти на грань треба відсікти всі вершини, крім вершини грані, на яку переходять. Перший доданок в (26) – це кількість вершин (переставлень) у множині E_k. У цій формулі віднімається максимально можлива кількість вершин на гіпергрань многогранника Π_k.

У многограннику переставлень Π_k без повторень очевидно – максимальна кількість вершин є на гіперграні вигляду:

$$x_i = g_1$$

або

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j = \sum_{j=2}^{k} g_j$$

(чи на грані $x_i = g_k$, або $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k-1} g_j$), тобто $(k-1)!$

Зауваження 4. Перевірити порівнянням з системами, що описують переставний многогранник, що відсікання дає грань, це $2^k - 1$ порівнянь рівнянь у випадку Π_k, та за [19] $k(\Gamma_{k-2}) = C_k^{i_1} + ... + C_k^{i_j} + ... + C_k^{i_s}$ порівнянь у випадку $\Pi_{k\nu}$,
де $i_j \in J_{k-1} \setminus \{\{J_{\eta_1} \setminus \{1\}\} \cup \{J_{k-2} \setminus J_{k-\eta_n-1}\}\}$, $\forall j \in J_s$.

Висновки

У роботі розглянута комбінаторна транспортна задача на переставленнях. Для класу задач, до якого вона відноситься, – умовних задачах з лінійною цільовою функцією на множині переставлень – обґрунтовано другий метод комбінаторного відсікання.

Як напрям подальших досліджень доцільно розглянути можливість приєднання необхідних та відкидання спрацювавших та вже зайвих обмежень, що дозволить, і в другому і в першому методах відсікання, значно збільшити вимірність задач, що можуть бути розв'язані.

Література

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая – К. : Наук. думка, 1988. – 472 с.

2. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы, решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 265 с.
3. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : [учебн. пособие] / Емец О.А. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
4. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – Київ : Інститут систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
5. Стоян Ю.Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи : [монографія] / Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
6. Ємець О.О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями : [монографія] / О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с.
7. Ємець О.О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування : [монографія] / О.О. Ємець, О.В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
8. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях : [монография] / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с.
9. Емец О.А. Об одном методе отсечений для задач комбинаторной оптимизации / О.А. Емец // Экономика и матем. методы. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С. 120-129.
10. Ємець О.О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації / О.О. Ємець, Є.М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105-109.
11. Емец О.А. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках / О.А. Емец, Е.М. Емец // Экономика и матем. методы. – 2001. – Т. 37. – С. 118-121.
12. Емец О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках / О.А. Емец, Л.Н. Колечкина // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 3. – С. 30-43.
13. Ємець О.О. Нелінійні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування / О.О. Ємець, Т.В. Чілікіна // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – Симферополь : Тавр. нац. университет. – С. 160-165.
14. Емец О.А. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах / О.А. Емец, Е.М. Емец // Кибернетика и сист. анализ. – 2009. – № 5. – С. 129-136.
15. Ємець О.О. Транспортні задачі комбінаторного типу / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2005. – Вып. 29. – С. 162-164.
16. Ємець О.О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 2. – С. 39-41.
17. Математические методы исследования операций : [учебн. пособие для вузов] / Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. – К : Вища школа, 1979. – 312 с.
18. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И.Л. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.
19. Ємець О.О. Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней / О.О. Ємець, С.І. Недобачій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 1998. – № 1. – С. 100-106.

О.А. Емец, Е.М. Емец, Д.М. Ольховский, Т.О. Парфенова

Второй метод комбинаторного отсечения и разрешения комбинаторных транспортных задач на перестановках

В статье рассматривается комбинаторная транспортная задача на перестановках. Для класса задач, к которому она относится, предложен и обоснован второй метод комбинаторного отсечения. В предложенном методе, в отличие от известного метода комбинаторного отсечения, предлагается объединить проверку условия соответствия полученного решения переставному многограннику с проверкой дополнительных линейных условий задачи. Отсечениие предлагается совершать только на переставном многограннике.

O.O. Yemets, E.M. Yemets, D.M. Olhovskiy, J.O. Parfionova

The Second Method of Combinational Cutting and Solution of Combinational Transport Tasks on Removals

Combinatorial transport task on removals is looked at the article. The second method of combinatorial cutting off is offered and proved for the class of tasks. It is offered to combine appliance condition checking of the removal polyhedron outcome-point with checking of the task extra linear conditions in the proposed method in contrast to well-known method of cutting off. The cutting off is proposed to do only on the removal polyhedron.

Стаття надійшла до редакції 22.12.2010.